Polynômes et fractions rationnelles à coefficients dans un corps

Exercice 1. $\star$ Soient K un corps et $P, Q \in K[X]$. Montrer que P et Q sont premiers entre eux si et seulement si $P+Q$ et PQ sont premiers entre eux.

Exercice 2. $\star$ Calculer le reste dans $\mathbf{Q}[X]$ de la division euclidienne de $(X+2)^{2022}$ par X^2+6X+8, puis de X^{2022} par X^2+2X+1.

Exercice 3. $\star$ Pour tout $P \in K[X]$, montrer que $P(X)-X$ divise $(P \circ P)(X) - X$.

Exercice 4. $\star$ Soient $m, q \in \mathbf{N}_{>0}$. CNS pour que $1+X+\cdots+X^q$ divise $1+X^m+\cdots+X^{qm}$.

Exercice 5. $\star$ Soient $P(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n \in \mathbf{Z}[X]$ avec $a_n \neq 0$ et $x = \frac{u}{v} \in \mathbf{Q}$ une racine de P (avec $\mathsf{pgcd}(u,v)=1$). Montrer que $u \mid a_0$ et $v \mid a_n$.

Exercice 6. $\star$ Soient $n \in \mathbf{N}_{>0}$ et $P \in \mathbf{R}[X]$ un polynôme de degré n. Montrer qu'il existe $a_0, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$ non tous nuls et tels que le polynôme $\sum_{i=0}^{n} a_i X^{2^i}$ soit divisible par P.

Exercice 7. $\star$ Soit $P \in \mathbf{R}_n[X]$ positif (*i.e.* qui ne prend que des valeurs positives sur $\mathbf{R}$). Montrer qu'il en est de même de $Q = P + P' + P^{(2)} + \cdots + P^{(n)}$.

Exercice 8. $\star$ Soit p un nombre premier. Nombre de polynômes irréductibles de degré 2 (resp. 3) dans $\mathbf{F}_p[X]$.

Exercice 9. $\star\star$ Soient $a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{Z}$ deux à deux distincts. Montrer que $(X-a_1)\cdots(X-a_n)-1$ est irréductible dans $\mathbf{Z}[X]$.

Exercice 10. $\star\star$ Soit $P \in \mathbf{R}[X]$ tel que $(\forall t \in \mathbf{R})\, P(t) \geqslant 0$. Montrer que P est somme de deux carrés de polynômes réels.

Exercice 11. $\star\star$ Soient $x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{R}$ tels qu'il existe $s \in \mathbf{R}$ avec $\sum_{i=1}^{n} x_i^k = s$ pour tout $k \in \{1, \ldots, n+1\}$. Montrer que s est un entier.

Exercice 12. $\star$ Déterminer les $P \in \mathbf{C}[X]$ unitaires tels que $(\forall z \in U)\ |P(z)| \leqslant 1$.

Exercice 13. $\star$ Le polynôme $P(X) = X^3 + 2X^2 + 7X + 1$ a trois racines $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbf{C}$. Calculer $\alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \alpha_3^3$.

Exercice 14. $\star$ Si les racines de $P(X) = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbf{R}[X]$ sont toutes réelles, on a $(d-1)a_{d-1}^2 \geqslant 2d a_d a_{d-2}$.

Exercice 15. $\star$ Soit $P \in \mathbf{C}[X]$ de degré n, de racines $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Pour $k \in \mathbf{N}$, on pose $S_k = \alpha_1^k + \cdots + \alpha_n^k$. Montrer que pour $t \in \mathbf{R}$ suffisament petit, on a $\frac{P'(1/t)}{tP(1/t)} = \sum_{k=0}^{\infty} S_k t^k$. Calculer $\sum_{i=1}^{8} (1+\alpha_i)^8$ lorsque $P(X) = X^8 - 1$.

Exercice 16. $\star$ Soit $P(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n \in \mathbf{C}[X]$ ayant n racines simples non nulles $x_1, \ldots, x_n$. Montrer que $-\frac{1}{a_0} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i P'(x_i)}$.

Exercice 17. ⋆⋆ Soit $P \in \mathbf{C}[X]$. Les racines de P' sont dans l'enveloppe convexe des racines de P.